Monte Carlo Metodu ve Yeni Zıplama ve Daralma Sürecinin BIST (Borsa İstanbul) Getirileri Uygulaması

Monte Carlo Methods and New Jump Diffusion Processes and Their Application in Gold Price

Assoc. Prof. Dr. Kutluk Kağan Sümer (İstanbul University, Turkey)

Abstract

This study aimed to execute Monte Carlo simulation method with Wiener Process, Generalized Wiener Process, Mean Reversion Process and Mean Reversion Jump Diffusion Process and to compare them and then expended with the idea of how to include negative and positive news shocks in the gold market to the Monte Carlo simulation. By enhancing the determination of the 3 standard deviation shocks within the process of Classic Mean Jump Diffusion Process, an enchanted model for the 1,96 and 3 standard deviation shocks were being used and additionally positive and negative shocks were added to the system in a different way. This new Mean Reversion Jump Diffusion Process that have been developed by Sümer, executes Monte Carlo simulation regarding the gold market return with five random variables that are chosen from Poisson distribution and one random variable chosen from the normal distribution. Additionally, by accepting volatilities as outlies over the 1,96 and 3 standard deviations with the effect of the new and good news and the standard deviations on the traditional approximate return and the standard deviations (volatility) and the obtained new approximate return and the new standard deviation (volatility) and compares them with the Monte Carlo simulations.

1 Stokastik Süreç:

Bir değişkenin değerleri zaman içerisinde belirsiz bir şekilde değişiyorsa bu değişkenin bir stokastik süreç takip ettiği söylenebilir. Bir stokastik süreç sürekli (continuous) veya kesikli (discrete) değişken şeklinde olabilir. Bir sürekli stokastik süreçte değişkenler belli bir aralıkta sürekli değerler aldığı gibi bir kesikli stokastik süreçte değişkenler kesikli değerler alabilirler.

Stokastik süreç'e uyan bir değişkenin bu günkü değerinin geçmiş davranışlarından tamamen bağımsız olması stokastik sürecin Markov özelliği olarak anılır. Yani diğer bir deyişle bir stokastik sürecin Markov özelliği o stokastik sürecin bu günkü değerinin geleceği ve geçmiş değerinin bu günü etkileme özelliği olmamasıdır.

Markov sürecini formüle edecek olursak:

$\{Y_t, t \in (0,\infty)\}$ bir stokastik süreç olsun. Her $n \geq 2$ doğal sayısı ve $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$ için $f(y_{t_n}/y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_{t_{n-1}}) = f(y_{t_n}/y_{t_{n-1}})$ oluyorsa buna bir Markov süreci denir.

Bir stokastik sürecin bilinmesi demek tüm sonlu boyutlu dağılımlarının bilinmesi demektir. Bir Markov sürecinin bilinmesi ise

i) $f(y_{t_0})$ daki (yani başlangıçtaki) olasılık yoğunluk fonksiyonunun,

ii) $f(y_{t_n}/y_{t_s})$, t>s (koşullu geçiş dağılımının) olasılık yoğunluk fonksiyonunun,

dağılımlarının bilinmesi demektir.

Markov sürecinde sonlu boyutlu dağılımlar örneğin $t_1 < t_2 < t_3$ için

$$f(y_{t_1}, y_{t_2}, y_{t_3}) = f(y_{t_1})\, f(y_{t_2}/y_{t_1})\, f(y_{t_3}/y_{t_2})$$

dir.

Genellikle hisse senedi fiyatlarının bir Markov süreci takip ettikleri kanaati yaygındır. Bu sebeple de gelecekle ilgili tahmin yaparken hisse senedinin gelecek tahmini için kullanılacak en geçerli bilgi bu günkü fiyat olacaktır.

Oysa hisse senedi fiyat davranışlarının bir Markov özelliği taşıması demekse bu günkü hisse senedi fiyatının geçmişteki tüm bilgileri yansıttığını ifade eden zayıf etkin piyasa formuna da uygunluk göstermektedir.

Bir Markov stokastik süreci $\Phi(\mu,\sigma)$ biçiminde gösterilen ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal dağılıma uygundur. Markov özelliği taşıyan bir değişkenin bir yıl süresince gözlemlenen değer değişimleri standart normal dağılıma uyacak olursa. Yani dağılım $\Phi(0,1)$ ise bu değişkenin iki yıl içindeki değer değişimlerinin dağılımı, ortalaması 0 ve varyansı 1 olan iki normal dağılımın toplamlarına eşit olacaktır. $\Phi(0,1)$ özelliğine yani standart normal dağılıma sahip olan iki normal dağılım toplandığında sonuç ortalaması ortalamalar toplamı, varyansı ise varyanslar toplamı olan yeni bir dağılımdır. Buna ek olarak değişkenlerin Markov özelliği taşıması nedeniyle bu iki olasılık dağılımı birbirinden bağımsızdır. Özetle göz önünde bulundurulan değişken için iki yıllık değişimin ortalaması 0 ve varyansı 2 olur. Böylece iki yıllık değişim aralığı $\Phi(0,\sqrt{2})$ olarak ifade edilebilir.

Özetlenecek olursa, değişkenin T uzunluğundaki bir dönemde değişiminin olasılık dağılımı $\Phi(0,\sqrt{T})$ olacaktır. Çok kısa bir zaman aralığındaki değişimi ise Δt ile gösterilecek olursa bu değişimin olasılık dağılımı da $\Phi(0,\sqrt{\Delta t})$ olacaktır.

Sonlu boyutlu dağılımları Normal dağılım olan Markov özelliği taşıyan bir Markov Sürecine Wiener süreci denilmektedir. Wiener süreci ortalaması 0 ve varyansı 1 olan Markov stokastik sürecinin özel bir durumudur. Wiener süreci fizik biliminde polen parçacığının hareketi, çok sayıda moleküler şoka maruz kalan parçacıkların hareketlerinin açıklamasında yaygın yer bulur. Brown'un yaptığı fizik deneylerinden kaynaklı olarak Bown hareketi (Brownian Motion) olarak da anılır. Brown hareketi bir Wiener süreci olarak modellenir.

Bir z değişkeni iki özelliğe sahipse bir Wiener sürecidir;

1. Çok kısa bir Δt zaman aralığındaki değişimi Δz ise

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

dir. Burada ε white noise sürecine uyan ve Φ(0,1) olan normal dağılımdan seçilen bir tesadüfi değişkendir.

2. Çok kısa bir Δt zaman aralığındaki değişimi ile Δz değerleri birbirinden bağımsızdır.

Δz ortalaması 0 ve standart sapması $\sqrt{\Delta t}$ olan bir normal dağılımdan gelmektedir.

Uzun bir T zaman dilimi içerisinde z deki bir değişim z(T)-z(0) olarak ifade edilebilir. ΔT N kadar küçük zaman aralığında z'deki değişimlerin toplamıdır. Yani $N = \frac{T}{\Delta t}$ dir. Bu durumda

$$z(T) - z(0) = \sum_{t=1}^{N} \varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$$

olacaktır. Burada $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ dir. Malum olduğu üzere ε_i ler birbirinden bağımsızdır. Özetle Δt→0 ise Δz→0 olacaktır.

Wiener sürecinde dz sürüklenme oranı (drift rate) olarak adlandırılır. dz~$N(0,1)$ dz'si sıfırdan farklı olan bir Wiener süreci Genelleştirilmiş Wiener süreci olarak adlandırılır. Bu durumdaki bir x değişkeni

$$dx = a\,dt + b\,dz$$

olarak tanımlanır burada a ve b sabit parametrelerdir. Bu durum a x sürecinin zaman içindeki sürüklenme oranının a olduğu manasına gelecektir.

$$a=0 \Rightarrow$$

$$dx=a\,dt \Rightarrow$$

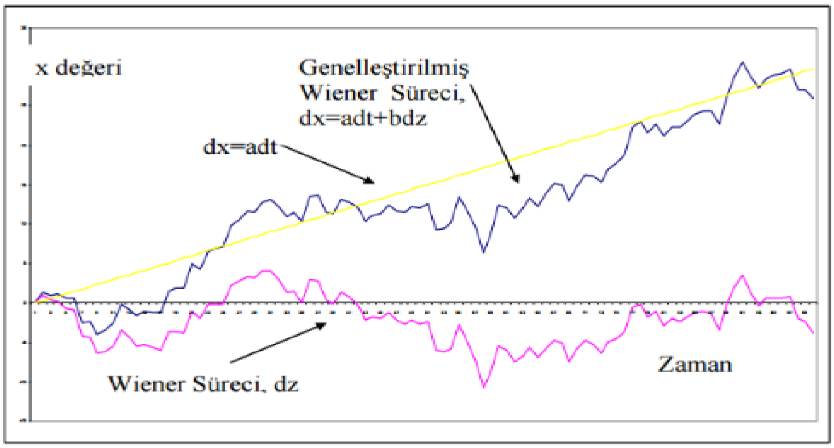
$$\frac{dx}{dt} = a$$

$$x=x_0 + at$$

olacaktır. Burada başlangıç seviyesi olan x_0 dan zaman içerisinde a kadar artan bir trend söz konusu olacaktır.

$$\Delta x = a\,\Delta t + b\,\varepsilon_i\sqrt{\Delta t}$$

olacaktır. Bu durumda Δx in ortalaması a Δt standart sapması $b\sqrt{\Delta t}$, varyansı ise $b^2\Delta t$ olacaktır.



Şekil 1: *Genelleştirilmiş Wiener Süreci (Aygören 2006)*

2 Genelleştirilmiş Wiener Süreci

Hisse senedi fiyat değişimleri davranışı genelleştirilmiş Wiener süreci ile açıklanabilir. Ancak, Hisse senedi fiyatlarının bir genelleştirilmiş Wiener süreci izlediği kabulü yapılırken dikkatli olunmalıdır çünkü genelleştirilmiş Wiener süreci sabit bir beklenen sürüklenme değerine ve sabit bir varyansa sahiptir. Oysa hisse senedi fiyatlarında sabit sürüklenme değerleri gözlemlenmez. Bu nedenle, hisse senedi fiyat hareket davranışları incelenirken hisse senedi fiyatları yerine yatırımcıların hisse senedinden bekledikleri getiri oranlarının kullanılması önem arz eder (Aygören 2006).

Hisse senedi fiyatlarında sabit bir sürüklenme süreci yoktur. Yatırımcı %20 getiri bekliyorsa Fiyat değişiminin fiyata oranının fiyattan bağımsız olarak $\frac{\Delta S}{S}$=0.20 olacağıdır yani S, t zamanındaki fiyatı gösterecek olursa beklenen sürüklenme oranı µ gibi bir sabit parametre için µS olacaktır. Bu çok kısa bir zaman aralığında yani Δt'de hisse senedi fiyatı olan S'de yükselişin µSΔt olacağı anlamına gelir. µ burada beklenen getiriden başka bir şey değildir. Buradan da hisse senedinin oynaklığı yani varyansı kabul edilirse:

$$\Delta S = \mu S \Delta t \qquad\qquad \Delta t \rightarrow 0$$

$$ds = \mu S dt \text{ veya } \quad \frac{dS}{S} = \mu dt$$

olacaktır. Bu durumda

$$S_T = S_0 e^{\mu t}$$

dir. Fakat oynaklık (volatilite) asla sıfır olmayacaktır. Bu durumda

$$ds = \mu S dt + \sigma s \, dz$$

veya

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S_\varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

burada $\mu\Delta t$ Δt zamanında hisse senedinin beklenen getirisi, $\sigma_\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ ise getirinin stokastik birleşenidir. Stokastik birleşene ait varyans $\sigma^2 \Delta t$ olacaktır bu durumda getiri de $\frac{\Delta S}{S}$ lik bir ortalama ve $\sigma\sqrt{\Delta t}$ standart sapmayla normal dağılacaktır.

$$\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$$

3 Ortalamaya Dönme Süreci

Ortalamaya dönme süreci basit bir örnekle kolayca açıklanabilir: Bir kişinin barda oturup sarhoş oluncaya kadar içtiğini ve eve dönüş sırasında da ona tasmasından tutmuş olduğu köpeğinin rehberlik ettiğini hayal edelim. Sarhoş ve köpek arasındaki mesafenin değişimini araştırdığımızı kabul edelim. Sarhoş yolda, bir sağa bir sola sendeleyerek yürüyecektir. Onun bu sendelemelerinin büyüklüğü, köpeğin bağlı olduğu ipin uzunluğuna, köpeğin pozisyonuna ve sarhoşun adımlarının büyüklüğüne bağlı olacaktır. Sarhoş sendeleyerek köpekten uzaklaştığında, köpek tarafından geri çekilecek ve sonunda evinin yolunu izleyecektir. (Önalan 2007)

Ortalamaya dönme süreci matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

S_{t+1}-S_t =	$\alpha\ (S^* - S_t)$	+ $\sigma\varepsilon_t$
Fiyat	Ortalamaya	Rasal
Değişimi	Dönme	Terim

S^* : Dönülen ortalama seviye veya uzun vadeli denge fiyatı

S_t : Spot fiyat

α : Ortalamaya dönme oranı

σ : Oynaklık

$\sigma\varepsilon_t$:t ve t+1 zamanları arasında fiyatı etkileyen rastsal şoklar.

Denklemi zaman'a göre değişimleri de içerecek şekilde daha genel olarak ifade edecek olursak:

$$d \log S_t = \alpha\ (S^* - \log S_t)\ dt + \sigma dW_t$$

α ' nın büyüyen değerleri, ortalamaya daha hızlı dönüleceğini gösterir. α Yıllık hale getirilmiş bir orandır. Örneğin α=2 ise bu fiyatların, uzun vadeli ortalama değere altı ayda bir döneceğini gösterir.

3.1 Ortalamaya Dönme Sürecinin Parametrelerinin Takdiri

Ortalamaya dönme oranı, lineer regresyon kullanılarak kolayca tahmin edilebilir. $x = log\ S$ olmak üzere, Ito Lemma kullanılırsa, fiyatların doğal logaritması, aşağıdaki Ornstein – Uhlenbeck Süreci ile karakterize edilebilir (Önalan 2007).

$$dx = \alpha\,(m-x)\,dt + \sigma dW$$

$$m = \mu - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \text{ (uzun vadeli ortalama)}$$

α : Ortalamaya dönme oranı (hızı)

Kullanılan zaman serisinin parametrelerini tahmin etmek için aşağıdaki regresyon denklemi kullanılır:

$$dx_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon$$

Burada , $\beta_0 = \alpha$ mdt ve $\beta_1 = -\alpha\, dt$ dir. Görüldüğü gibi, x değerleri, dx 'e karşı regresyona tabi tutulmaktadır. σ oynaklığı, regresyonun standart hatası ile tahmin edilir. Bir ortalamaya dönme sürecinde oynaklık, fiyatlar üzerinde sınırlı bir etkiye sahiptir. Bir rastsal şoktan sonra, fiyatlar tekrar uzun vadeli ortalamaya geri dönerler. Yani fiyatların uzun vadeli değişkenliği zaman ile orantılı olarak büyümez.

3.2 Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon Süreci

Ortalamaya dönme sürecini açıklarken, köpeğinin kendisine rehberlik ettiği bir sarhoşun bardan eve giderken izlediği yolu modellemek için rastsal yürüyüş sürecini kullanmıştık. Sarhoşun sendeleyerek yürümesinin yönü ve büyüklüğü genelde rastsaldır. Yani bir rastsal yürüyüş süreci izler. Sarhoşun sendelemelerinin büyüklüğü, köpeğin ipinin uzunluğu ile sınırlıdır. Sarhoş sendeleyerek köpekten uzaklaştığında, ip sonuna kadar gerilecek ve sarhoş köpeğe doğru geri çekilecektir (Blanco, C. ve Saranow, D.(2001)). Şimdi de, aniden yoldan bir arabanın geçtiğini ve köpeğin arabanın peşinden koştuğunu düşünelim. Bunun sonucunda, sarhoş aniden hızlı bir şekilde araba yönünde çekilecektir. Araba uzaklaştığında ise köpek tekrar ev yönünde hareket edecek ve sarhoş normal pozisyonuna geri dönecektir. Bu durumu difüzyon bileşenine bir de sıçrama bileşeni ekleyerek modelleyebiliriz.

$S_{t+1}-S_t =$	$\alpha\,(S^* - S_t)\,\Delta t$	$+\ S_t\,\sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}$	$+\ ln\,J\,\Delta q_t$
Fiyat Değişimi	Ortalamaya Dönme terimi	Difüzyon terimi	Sıçrama terimi

S_t : Spot fiyat

S^* : Dönülen ortalama seviye veya uzun vadeli denge fiyatı

α : Ortalamaya dönme oranı (hızı)

σ : Oynaklık

J :Rasal sıçrama büyüklüğü

Δq :Poisson süreci

$$\Delta q_t = \begin{cases} 1, & \lambda\Delta t \ \ ihtimalle \\ 0, & 1 - \lambda\Delta t \ \ ihtimalle \end{cases}$$

Burada, λ sıçrama sürecinin yoğunluğu veya sıklığı olarak adlandırılmaktadır. Sıçrama büyüklüğü J için aşağıdaki varsayımları kabul edilir:

- J lognormal dağılmıştır. Yani, ln J~ N(μ_j , σ^2_j)
- Sıçramalarla ortaya çıkan risk sistematik değildir.

Bu nedenle de çeşitlendirme yapılarak yok edilemez. Üstelik E(J)=1, olduğunu kabul edilerek, üstlenilen risk için fazladan bir ödülün olmadığını da garanti edilmiş olur. Bu varsayımlar altında, J'nin özelliklerini aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

- $J = e^{\phi}\ ,\ \ \phi \sim N\left(-\frac{\sigma_J^2}{2}, \sigma_J^2\right)$
- $E(J)=1$
- $E(ln\ J) = -\frac{\sigma_J^2}{2}$
- $Var(ln\ J) = \sigma_J^2$

S_t yi ifade eden stokastik diferansiyel denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$dS_t = \alpha\,(S^* - ln\ S_t)\,S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t + S_{t-1}\,(J-1)\,dq_t$$

$dq_t = 0$ olduğunda, ortalamaya dönme difüzyon süreci elde edilir. Rastsal zamanlarda, S_t önceki değer

S_{t-1} yeni değer JS_{t-1} e sıçrayacaktır. $S_{t-1}\,(J-1)$ sıçramadan önceki ve sonraki değişimi verecektir. Yani , $\Delta S_t = JS_{t-1} - S_{t-1}$ olur.

Modelin kesikli zamanlı versiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} = \alpha(S^* - \ln S_t)\Delta t + \sigma\varepsilon_i\sqrt{\Delta t} + \Delta S_t \Delta q_t$$

3.3 Parametrelerin Tahmini

Oynaklık (σ) : Oynaklığın zamanla sabit olması durumunda, genellikle tarihsel hareketli oynaklık, bir tahmin olarak kullanılabilir. Örneğin, aylık periyotlarla hesaplanan hareketli tarihsel oynaklıkların ortalaması yıllık oynaklık olarak kullanılabilir.

Ortalamaya dönme oranı (α) : Ortalamaya dönme oranı, bir lineer regresyon kullanılarak tahmin edilir. Bu durumda x_t logaritmik fiyatlar serisine karşılık Δx_t getirileri regresyona tabi tutulur.

Sıçrama Parametresi (J) : Sıçrama bileşeninin parametrelerini tahmin etmek için önce getiri serileri süzülür. Sonra bu verileri kullanarak, sıçramaların standart sapması σ_J ve sıçramaların sıklığı (yoğunluğu) λ tahmin edilir. λ , yıl içerisindeki sıçramaların toplam sayısı, gözlem sayısına bölünerek hesaplanır. Bu değer bize sıçramaların, ortalama olarak ne kadar sıklıkta olduğunu söyler. Sıçrama oynaklığı olarak da bilinen sıçramaların standart sapması, sıçrama büyüklüklerini tanımlayan olasılık dağılımının standart sapmasını gösteren bir sayıdır. Veri miktarına bağlı olarak, 3 standart sapmanın ötesindeki olayları Sıçrama olayları olarak düşünebiliriz. Modelin parametrelerinin geçmiş verilere dayanarak tahmin edilmesindeki zayıflık, tarihsel kayıtların gelecek sıçramalar hakkındaki beklentileri içermemesinden kaynaklanmaktadır (Önalan 2007).

4 Uygulama

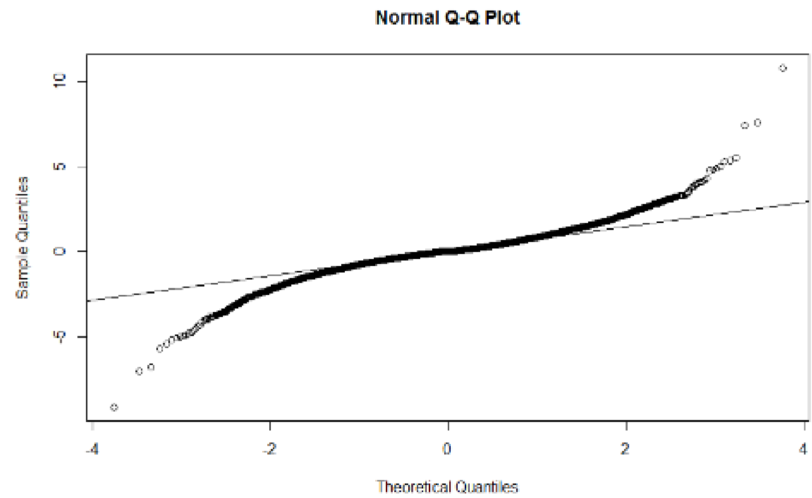
Uygulamada günlük veriler tercih edilmiştir. Buna göre çalışmada, USD Cinsinden Altının Ons Fiyatının 02.01.1996-15.08.2017 tarihlerine ait 5851 kapanış değerleri kullanılmıştır. Bu kapanış değerlerinden getiriler hesaplanmıştır.

Uygulamada, R Studio programından faydalanılmıştır.

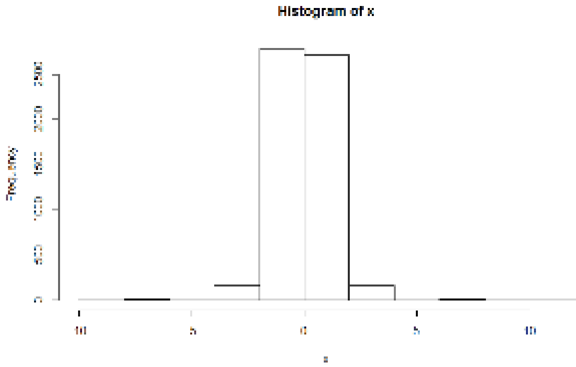
Getiri Serisinin Özellikleri

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	Std
-9.13197	-0.44744	0.0000	0.02557	0.51854	10.79882	1.03701

***Tablo 1:** Getiri Serisinin Özellikleri*



***Şekil 2:** Normal Q-Q Çizimi*

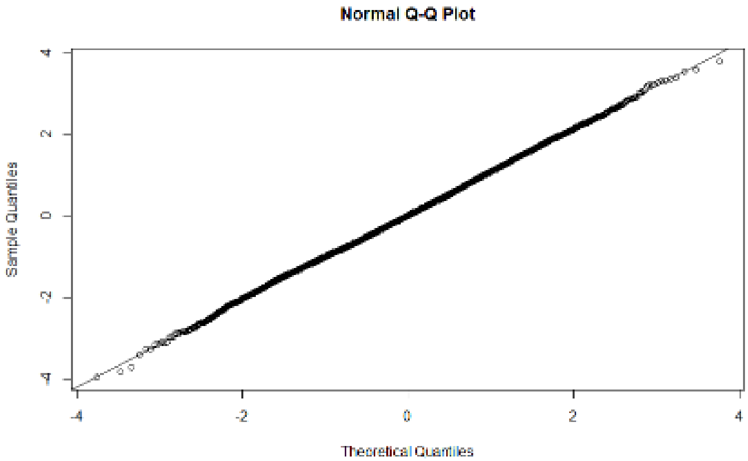


Şekil 3: *Getiri Serisinin Histogramı*

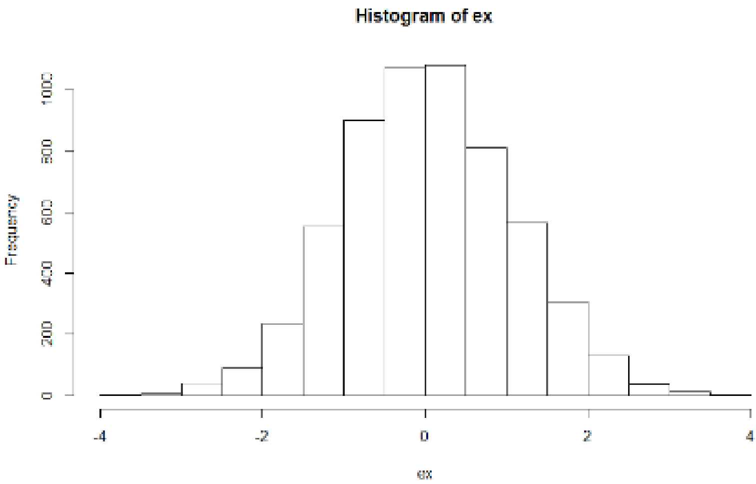
4.1 Klasik Monte Carlo Tahmini (Getiri Serisinin Ortalama ve Varyansıyla)

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	Std
-3.94	-0.6927	0.0151	0.02931	0.731	3.782	1.043423

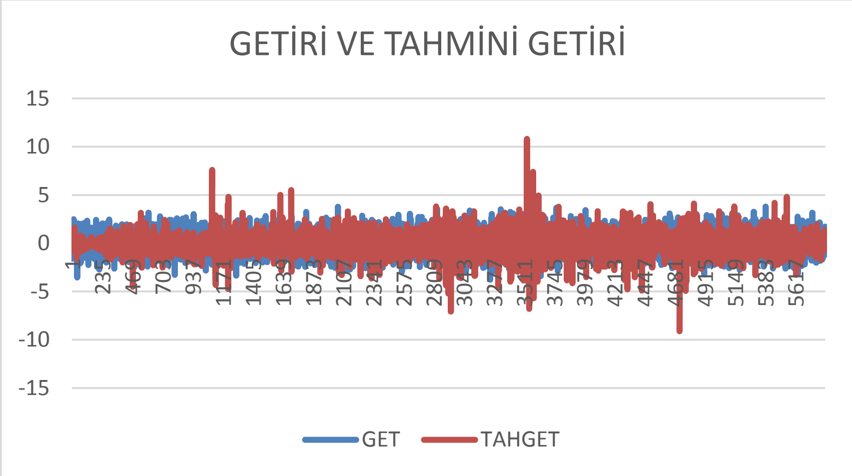
Tablo 2: *Getiri Serisinin Özellikleri*



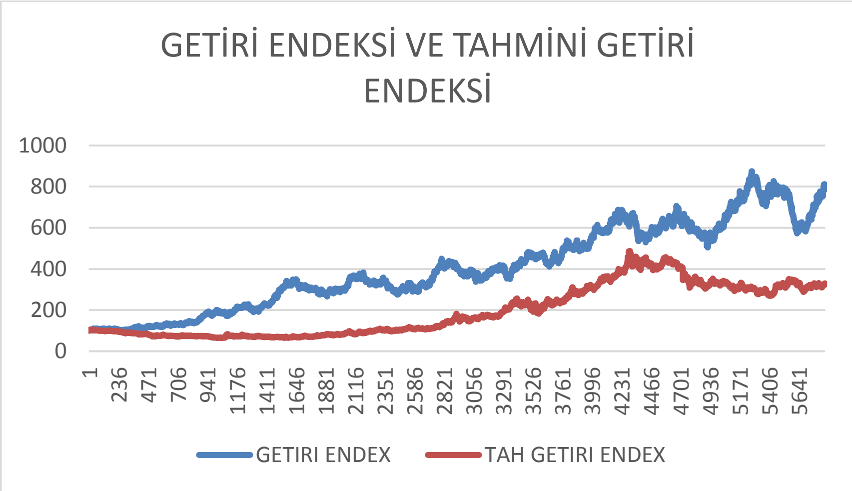
Şekil 4: *Tahmini Getiri Serisinin Normal Q-Q Çizimi*



Şekil 5: *Tahmini Getiri Serisinin Histogramı*



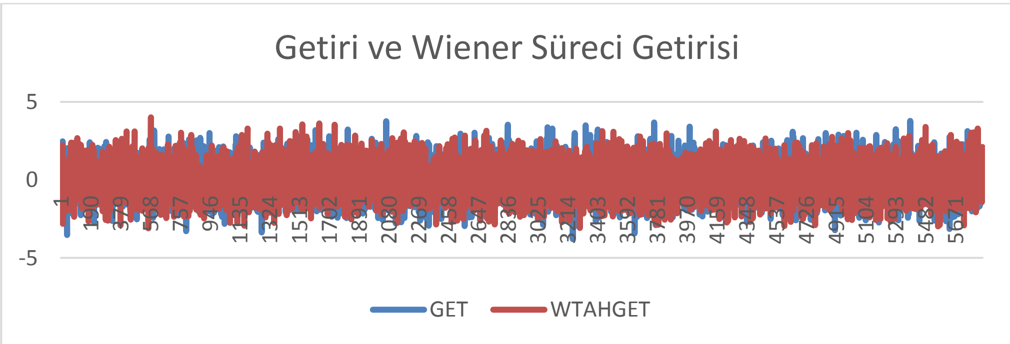
Şekil 6: *Getiri ve Tahmini Getiri*



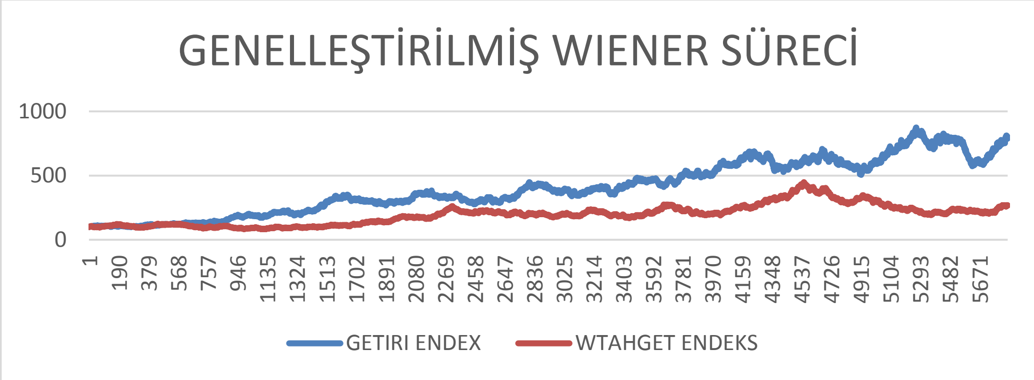
Şekil 7: *Getiri Endeksi Ve Tahmini Getiri Endeksi*

4.2 Genelleştirilmiş Wiener Süreciyle Monte Carlo Tahmini

$$\text{Getiri} = 0.02931 + 1.03701^{*}\ \varepsilon \sim N(0,1)$$



Şekil 8: *Getiri ve Wiener Süreci Getirisi*



Şekil 9: *Genelleştirilmiş Wiener Süreci*

4.3 Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon Süreciyle Monte Carlo Tahmini

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon + K\Delta q_t$$

$$\Delta q_t = \begin{cases} 1, & \lambda\Delta t \ \ ihtimalle \\ 0, & 1-\lambda\Delta t \ \ ihtimalle \end{cases}$$

$\mu\Delta t$ Yıllık ortalama getiri

$\sigma\sqrt{\Delta t}$ Hisse senedinin Oynaklığı (getirinin std sapması)

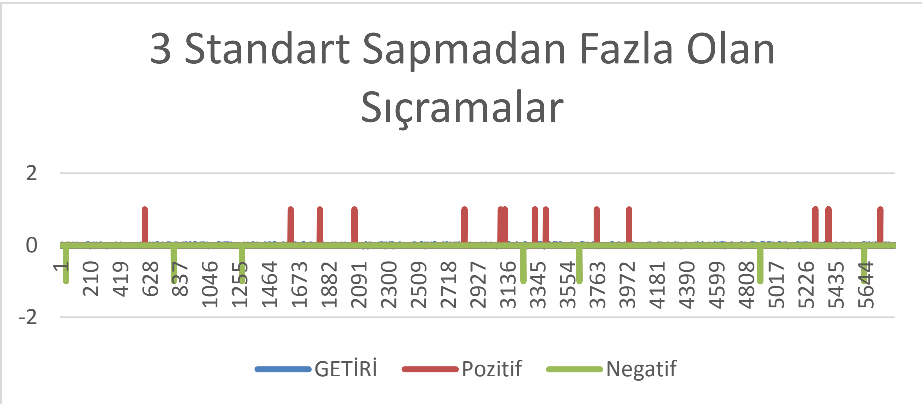
ε Standart Normal dağılımdan çekilmiş tesadüfi değişken ε~N(0,1)

K fiyattaki oransal artma olarak ölçülen ortalama sıçrama büyüklüğü

λ Birim zamandaki (yıl) sıçrama oranı (Poisson sürecinin yoğunluğu)

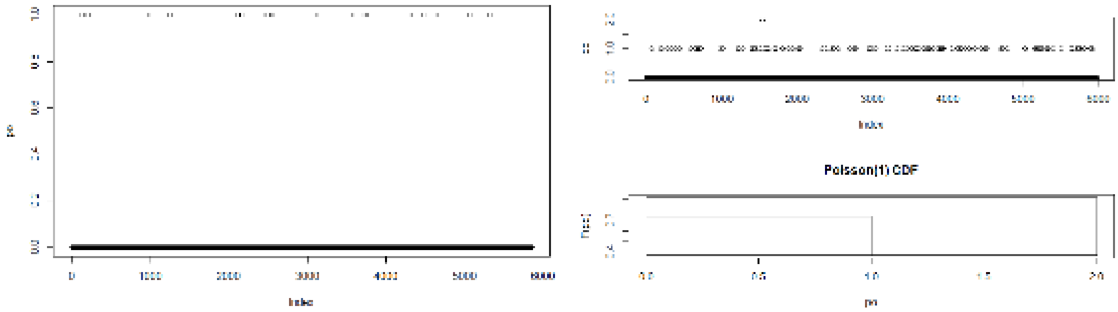
Δq_t Poisson Sürecinden elde edilen gölge değişken

Getiri = Ortalama Getiri + Std. Sapma Getiri * ε~N(0,1) + Sıçrama Oranı * Δq_t(Tesadüfi Poisson Deişkeni) olacaktır.

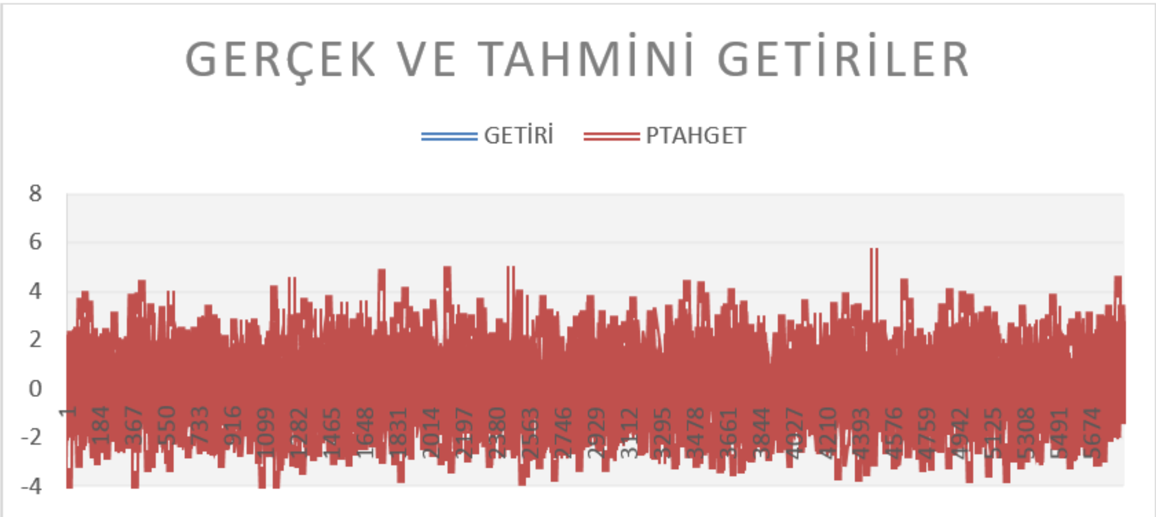


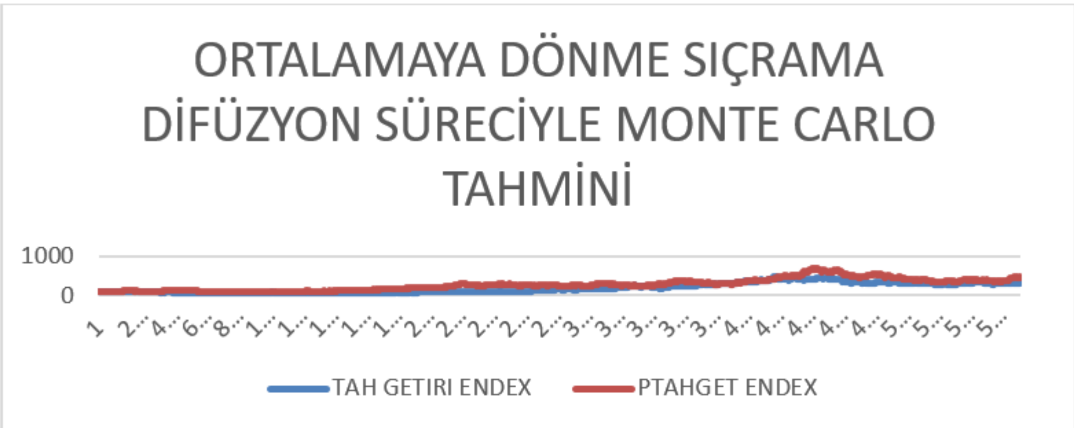
Şekil 10: *3 Standart Sapmadan Fazla Olan Sıçramalar*

5850 gözlemde 14 pozitif, 7 negatif olmak üzere 21 sıçrama gözlenmiştir. Sıçrama oranı λ=0.0035897435897 dür. Sıçrama Oranı K=3 σ olarak belirlenmiştir. Yani K= 3.11103 olacaktır.



Şekil 11: *Poisson Süreci Tahminleri*





Şekil 12: *Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon Süreciyle Monte Carlo Tahmini*

4.4 Yeni Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon Süreciyle Monte Carlo Tahmini

Modeldeki 3 standart sapmalık şokların tespiti geliştirilerek 1.96 ve 3 standart sapmalık şoklara ait geliştirilmiş bir model kullanılabilir.

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon + K\Delta q0_t + SK1\Delta q1_t - SK2\Delta q2_t + SK3\Delta q3_t - SK4\Delta q4_t$$

$$\Delta qN_t = \begin{cases} 1, & \lambda\Delta t \ \ ihtimalle \\ 0, & 1-\lambda\Delta t \ \ ihtimalle \end{cases}$$

$\mu\Delta t$ Yıllık ortalama getiri

$\sigma\sqrt{\Delta t}$ Hisse senedinin Oynaklığı (getirinin std sapması)

ε Standart Normal dağılımdan çekilmiş tesadüfi değişken ε~N(0,1)

K	fiyattaki oransal artma olarak ölçülen ortalama sıçrama büyüklüğü
SK1	fiyattaki oransal artma olarak ölçülen 3 standart sapmalık pozitif ortalama sıçrama büyüklüğü
SK2	fiyattaki oransal artma olarak ölçülen 3 standart sapmalık negatif ortalama sıçrama büyüklüğü
SK3	fiyattaki oransal artma olarak ölçülen 1.96 standart sapmalık pozitif ortalama sıçrama büyüklüğü
SK4	fiyattaki oransal artma olarak ölçülen 1.96 standart sapmalık negatif ortalama sıçrama büyüklüğü
λ	Birim zamandaki (yıl) sıçrama oranı (Poisson sürecinin yoğunluğu)
ΔqN_t	Poisson Sürecinden elde edilen gölge değişken

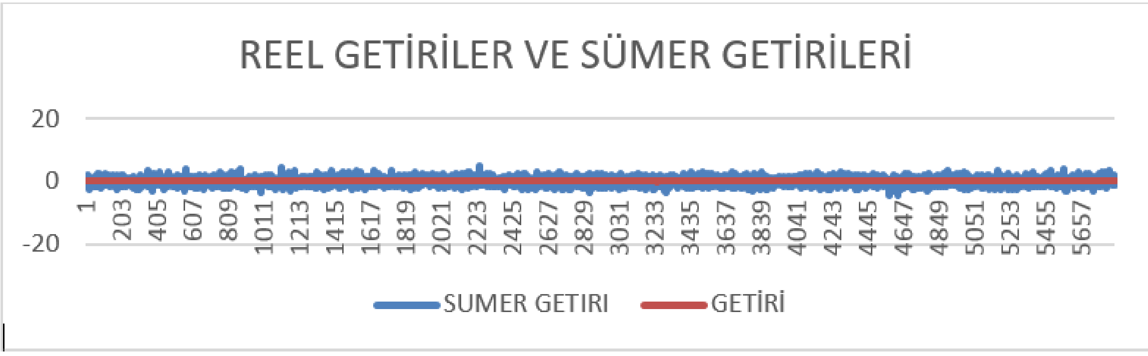
Getiri = Ortalama Getiri + Std. Sapma Getiri * ε~N(0,1) + Sıçrama Oranı * $\Delta q0_t$(Tesadüfi Poisson Deişkeni1) + Pozitif Sıçrama Oranı1 * $\Delta q1_t$(Tesadüfi Poisson Deişkeni2) - Negatif Sıçrama Oranı1 * $\Delta q2_t$(Tesadüfi Poisson Deişkeni3)+ Pozitif Sıçrama Oranı2 * $\Delta q3_t$(Tesadüfi Poisson Deişkeni4) - + Negatif Sıçrama Oranı2 * $\Delta q4_t$(Tesadüfi Poisson Deişkeni5)

olacaktır.

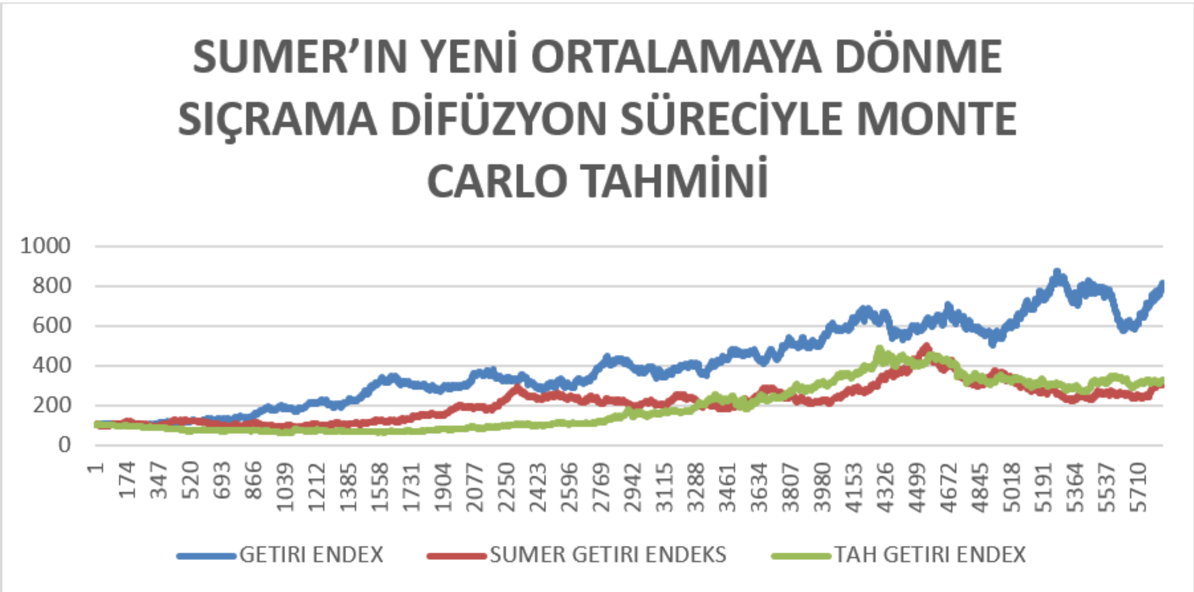
Bunlarda ortalama ve standart sapma hesaplanırken 2 ve 3 standart sapmalık şoklara ait değerlerin bir outlier olarak değerlendirilmesi ile ortalama ve standart sapmaların hesaplanarak Monte Carlo tahmini yapılması da Sümer tarafından alternatif bir yapı olarak sisteme eklenmiştir.

Burada ortalama getiriler de iyi ve kötü haber etkilerinden arındırılarak yeniden hesaplanacak olursa Formül aşağıdaki hale dönüşecektir:

$$SUMER\,(\frac{\Delta S}{S}) = NEW(\mu)\Delta t + NEW(\sigma)\sqrt{\Delta t}\varepsilon + K\Delta q0_t + SK1\Delta q1_t - SK2\Delta q2_t + SK3\Delta q3_t - SK4\Delta q4_t$$



Şekil 13: *Reel Getiriler ve Sümer Getirileri*



Şekil 14: *Yeni Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon Süreciyle Monte Carlo Tahmini*

5 Sonuç

Klasik monte carlo tahmini (getiri serisinin ortalama ve varyansıyla) tahminler içerisinde en zayıf olanıdır. Serinin ortalaması ve klasik varyansıyla yapılan tahmin volatiliteleri yansıtma açısından en zayıf olanıdır. Genelleştirilmiş wiener süreciyle monte carlo tahmini klasik monte carlo tahminine göre biraz daha düzgün sonuçlar vermektedir. Çünkü getiri serisinin ortalamasını sabit değişken standart sapmasını ise ilişkisel değişken olarak alan bir modele $\varepsilon \sim N(0,1)$ ile monte carlo tahmini yapılan hata terimlerinin yüklenmesiyle elde edilmiştir.

Ortalamaya dönme sıçrama difüzyon süreciyle monte carlo tahmini ise wiener süreciyle monte carlo tahminine poisson dağılımından çekilen bir şok değişkenini de eklediği için tahminler daha düzgün hale gelmiştir.

Son olarak kullanılan Sümer'in ortalamaya dönme sıçrama difüzyon süreciyle monte carlo tahmini ise wiener süreciyle monte carlo tahminine poisson dağılımından çekilen 1.96 ve 3 standart sapmalık, pozitif ve negatif şok değişkenleri de eklediği için tahminler arasında en düzgünü haline gelmiştir.

6 Tartışma

Ortalamaya dönme sıçrama difüzyon süreciyle monte carlo tahmini ile wiener süreciyle monte carlo tahminine poisson dağılımından çekilen bir şok değişkenini de eklenmesiyle daha düzgün tahminler yapılabildiği bilinen bir gerçektir.

Sümer'in geliştirdiği 1.96 ve 3 standart sapmalık, pozitif ve negatif şok değişkenleri de eklediği model Ortalamaya dönme sıçrama difüzyon süreciyle monte carlo tahminini daha güçlü hale getirmiş ve geliştirmiştir. Burada ortalama ve standart sapma hesaplanırken 2 ve 3 standart sapmalık şoklara ait değerlerin bir outlier olarak değerlendirilmesi ile ortalama ve standart sapmaların hesaplanarak Monte Carlo tahmini yapılması da yeni bir düşüncedir.

Yüksek volatiliteli günleri outlier olarak kullanarak yeni ortalama ve standart sapmalar hesaplamak bu örnekte konvensiyonel yönteme göre daha iyi sonuçlar vermiştir. Bunun başka uygulamalarda da geçerli olup olmadığı da bir başka tartışma konusudur.

Farklı alternatifler olarak şok sapmalarının mesafelerinden faydalanılarak Cook ve Mahalonabis mesafeleri hesaplana bilir. Volatilitenin yüksek olduğu serilerde medyana ait parametre tahminlerinin daha iyi sonuçlar verebileceği de bir gerçektir.

Kaynakça

- Aygören, Hakan; İMKB-100 Endeks Davranışının Monte Carlo Simülasyonu İle İncelenmesi;
- Ball,C.A.ve Torous, W.N. "A Simplified Jump Processes for Common Stock Returns" The Journal of Finance and Quantitative Analysis,18(1):53-65, 1983.
- Blance, C. ve Saronov, D., "Jump Diffusion Processes, Energy Price Processes Used for Derivatives Pricing and Risk Management", Working Paper,2001.
- Clewlow, L., Strickland,C.ve Kaminski, V., "Extending Mean-Reverting Jump Diffusion", Energy Power Risk Management, Risk Water Group, February, 2001
- Mufad Journal; Sayi 29; Ocak 2006; pp:197-205
- Önalan, Ömer; Finansal Zaman Serileri İçin Ortalamaya Dönme Sıçrama Difüzyon Modeli; Marmara Üniversitesi İ.İ.B.F. Dergisi; Yil 2007, Cilt XXII, Sayi:1; pp:201-224